Nach Helmholtz lässt sich ein beliebiges Vektorfeld ausschließlich durch eine Kombination von Quellen und Wirbeln erzeugen. Der Beweis dazu ist leider nicht übersichtlich. Wir suchen einen konstruktiven Nachweis.

## 1) Helmholtz Satz

Felder haben algebraisch die Eigenschaft einer Gruppe bzgl. ihrer Überlagerung, tatsächlich sogar eines Ringes. Das heißt, wenn man ein Vektorfeld mit einem anderen Vektorfeld überlagert, erhält man wieder ein Vektorfeld.

Dieses Feld ergibt sich aus einer Überlagerung eines wirbelfreien Feldes und eines quellenfreien Feldes.

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_W$$

Der Helmholtzsatz besagt, dass sich ein beliebiges Vektorfeld aus einer Überlagerung eines Skalarpotential und eines Vektorpotentials ableiten lässt. Dabei ist U ein Skalarpotential und A ein Vektorpotential.

$$\vec{E} = gradU + rot\vec{A} = \vec{E}_q + \vec{E}_W$$

Daraus lässt sich auch ableiten, wenn man ein quellenfreies Vektorfeld mit einem anderen quellenfreien Vektorfeld überlagert, man wieder ein quellenfreies Vektorfeld erhält. Gleiches gilt für das wirbelfreie Vektorfeld.
Daraus folgt, dass algebraisch eine Untergruppe für das wirbelfreie und das quellenfreie Feld existieren muß.

2) Durch die Differentialoperatoren div und rot erhält man die Quellen und Wirbel des Feldes E.

$$div\vec{E} = \rho \qquad rot\,\vec{E} = \vec{H}$$

Quellen lassen sich nicht durch Wirbel erzeugen und umgekehrt. Die Quellen und Wirbel transformieren sich unabhängig von einander.

$$div\vec{E}_1 + div\vec{E}_2 = \rho_1 + \rho_2 \qquad rot\,\vec{E}_1 + rot\vec{E}_2 = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

Quellen wie auch Wirbel bilden beide eine Gruppe bzgl. ihrer Überlagerung. Das heißt, wenn man ein Quelle mit einer anderen Quelle überlagert, erhält man wieder eine Quelle und gleiches gilt für Wirbel.

## 2) Problemstellung

Bisher haben wir gesehen, dass ein Quellenfeld und ein Wirbelfeld überlagert werden können. Weiterhin sehen wir, dass wir an die Quellen und Wirbel durch verschiedene Differentialoperatoren gelangen.

Da die Linearkombination der Felder möglich ist, sollte gleiches für die Differentialoperatoren gelten. Es wird also eine Linearkombination von Div und Rot gesucht, die auf das totale Differential führt.

Weiterhin ist auch noch nicht offensichtlich, dass hierzu alleine Div und Rot ausreichen und es weitere Differentialoperatoren gibt, die andere Feldursachen zu Tage fördern.

So fehlt auch der Nachweis, dass ein Feld ausschließlich durch Quellen und Wirbel beschrieben werden kann. Weiter ist nicht klar,

Wir starten mit dem totalen Differential eines beliebigen Vektorfeldes. Allgemein liefert das totale Differential eines Feldes E die folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial E_1/\partial x & \partial E_2/\partial x & \partial E_3/\partial x \\ \partial E_1/\partial y & \partial E_2/\partial y & \partial E_3/\partial y \\ \partial E_1/\partial z & \partial E_2/\partial z & \partial E_3/\partial z \end{bmatrix}$$

Diese Matrix sollte dann beides die Quellen und Wirbel liefern. Leider ergibt sich diese Matrix nicht offensichtlich aus einer Kombination von div und rot.

Unschön ist, dass das totale Differential nicht durch eine innere Algebra gebildet wird, sprich zwei einzeilige Matrizen liefern eine 2 dim Matrix. Dies lässt sich durch die folgende alternative Darstellung beheben:

$$\begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ -\partial/\partial x & 0 & \partial/\partial z \\ -\partial/\partial y & -\partial/\partial z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 \\ -E_1 & 0 & E_3 \\ -E_2 & -E_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial E_1/\partial x - \partial E_2/\partial y & -\partial E_3/\partial y & \partial E_3/\partial x \\ -\partial E_2/\partial z & -\partial E_1/\partial x - \partial E_3/\partial z & -\partial E_2/\partial x \\ \partial E_1/\partial z & -\partial E_1/\partial y & -\partial E_2/\partial y - \partial E_3/\partial z \end{bmatrix}$$

Dabei bilden die drei folgenden Matrizen eine Basis für den Differentialoperator und das Feld:

$$e1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Unschön ist, dass diese Basis bzgl. der Multiplikation keine in sich geschlossene Gruppe bildet. Die Folge ist, dass sich nicht einzelne Differentialoperatoren identifizieren lassen. Auch erhalten wir Mischterme auf der Diagonalen.

 

**3) Lösung**
Die erste Frage ist, in welcher Beziehung das totale Differential zu den Operatoren Div und Rot besteht.
Die Rotation von E ergibt sich durch Anwenden der Lie Klammer auf ∂E/ ∂x:
Rot E = [∂E/ ∂x, $(\partial E/\partial x)^T$]

Die Divergenz ergibt sich durch das Bilden der Spur von ∂E/ ∂x:
Div E = Spur {∂E/ ∂x}.

Unbefriedigend ist, dass diese Ableitung nicht konstruktiv ist.

Wenn der Helmholtz Satz stimmt, müsste er sich konstruktiv durch Zerlegen der Menge der totalen Differentiale in zwei Untergruppen herleiten lassen, die dann die Quellen und Wirbel repräsentieren. Beide Untergruppen zusammen müßten, dann wieder die Gesamtheit aller totalen Differentiale des Feldes ∂E/ ∂x ergeben.

Tatsächlich läßt sich eine beliebige Matrix in eine gerade (diagonal symetrische) und in eine ungerade (diagonal schiefsysmetrische) Matrix zerlegen.

$2M = M_g + M_u = M + M^T + M - M^T$

Die geraden wie die ungeraden Matrizen bilden beide eine Gruppe bzgl. der Addition.
Nun spalten wir das totale Differential in seinen geraden und ungeraden Teil auf und schauen, ob wir hierdurch eine Zerlegung in Divergenz und Rotation erhalten.

$$M_g = \begin{bmatrix} 2\,\partial E_1/\partial x & \partial E_2/\partial x + \partial E_1/\partial y & \partial E_3/\partial x + \partial E_1/\partial z \\ \partial E_2/\partial x + \partial E_1/\partial y & 2\,\partial E_2/\partial y & \partial E_3/\partial y + \partial E_2/\partial z \\ \partial E_3/\partial x + \partial E_1/\partial z & \partial E_3/\partial y + \partial E_2/\partial z & 2\,\partial E_3/\partial z \end{bmatrix} \quad 2\,div\vec{E} = Spur\{M_g\}$$

Tatsächlich, der gerade Teil enthält die Divergenz als Spur der Matrix. Weiter ist bekannt, dass die Spur bzgl. der Addition eine Gruppe bildet. Dadurch ist gewährleistet, dass Matrixaddition sich so verhält, wie die Addtion der Divergenzen. Unschön ist allerdings, dass der gerade Teil nicht direkt die Divergenz enthält.

Der ungerade Teil ergibt dagegen direkt die Rotation, wenn die ausgezeichneten Matrizen als Basis interpretiert werden.

$$M_u = \begin{bmatrix} 0 & \partial E_2/\partial x - \partial E_1/\partial y & \partial E_3/\partial x - \partial E_1/\partial z \\ \partial E_1/\partial y - \partial E_2/\partial x & 0 & \partial E_3/\partial y - \partial E_2/\partial z \\ \partial E_1/\partial z - \partial E_3/\partial x & \partial E_2/\partial z - \partial E_3/\partial y & 0 \end{bmatrix}$$

$$rot\vec{E} = \left(\partial E_2/\partial x - \partial E_1/\partial y\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\partial E_3/\partial x - \partial E_1/\partial z\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\partial E_3/\partial y - \partial E_2/\partial z\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

 

Die Darstellung mit 3x3 Matrizen ist aber immer noch unbefriedigend, da sich das totale Differential nicht durch eine Linearkombination von Div und Rot darstellen läßt.

Benutzt man Quaterionen ergibt sich aus der Multiplikation von zwei Quaterionen ganz natürlich eine Zerlegung in Rotation und Divergenz u*v = u x v – u*v.

Als orthgonale Basis wählen wir:

$$1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad i=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad j=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}\quad k=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\end{bmatrix}$$

Diese Basis stellt selbst eine Gruppe bzgl. der Multiplikation dar. Wendet man nun das totale Differential

$$\left[\partial/\partial x * i + \partial/\partial x * j + \partial/\partial x * k\right]$$

auf ein Vektorfeld an, so erhält man eine Linearkombination der Wirbel Rot und der Quellen Div.

$$\left[\partial/\partial x * i + \partial/\partial x * j + \partial/\partial x * k\right] * \left[E_1 * i + E_2 * j + E_3 * k\right] = rot_x\vec{E} * i + rot_y\vec{E} * j + rot_z\vec{E} * k - div\vec{E} * 1$$

Diese Gleichung kann auch als Matrixgleichung geschrieben werden.

$$\begin{bmatrix}0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -\partial/\partial x & 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y\\ -\partial/\partial y & \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x\\ -\partial/\partial z & -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & -E_3 & E_2\\ -E_2 & E_3 & 0 & -E_1\\ -E_3 & -E_2 & E_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-div\vec{E} & rot_x\vec{E} & rot_y\vec{E} & rot_z\vec{E}\\ -rot_x\vec{E} & -div\vec{E} & -rot_z\vec{E} & rot_y\vec{E}\\ -rot_y\vec{E} & rot_z\vec{E} & -div\vec{E} & -rot_x\vec{E}\\ -rot_z\vec{E} & -rot_y\vec{E} & rot_x\vec{E} & -div\vec{E}\end{bmatrix}$$

Diese Darstellung lässt sich wieder in einen symetrischen Teil und einen antisymetrischen Teil zerlegen. Der symetrische Teil besteht nun ausschließlich aus den Quellen Div E des Vektorfeldes. Die antisymetrische Matrix stellt nun ausschließlich die Wirbel dar.

$$rot\vec{E} = \left(\partial E_2/\partial x - \partial E_1/\partial y\right) i + \left(\partial E_3/\partial x - \partial E_1/\partial z\right) j + \left(\partial E_3/\partial y - \partial E_2/\partial z\right) k$$

Beide Teile sind selbst wieder eine Gruppe bzgl. der Addition. Dadurch ist sicher, dass Quellen wieder zu Quellen werden und dass Wirbel wieder zu Wirbeln werden.
Damit ist gezeigt, dass sich Divergenz und Rotation in einem Differentialoperator kombinieren lassen und dass dadurch ein beliebiges Feld aussschließlich in seine Quellen und Wirbel zerlegt wird.